维基百科
自由的百科全书
维基百科

LQR控制器

最优控制理论主要探讨的是让动力系统以在最小成本来运作，若系统动态可以用一组线性微分方程表示，而其成本为二次泛函，这类的问题称为线性二次（LQ）问题。此类问题的解即为线性二次调节器（英语：linear–quadratic regulator），简称LQR。

LQR是回授控制器，方程式在后面会提到。LQR是LQG（线性二次高斯）问题解当中重要的一部分。而LQG问题和LQR问题都是控制理论中最基础的问题之一。

简介

控制机器（例如飞机）的控制器，或是控制制程（例如化学反应）的控制器，可以进行最佳控制，方式是先设定成本函数，再由工程师设定加权，利用数学算法来找到使成本函数最小化的设定值。成本函数一般会定义为主要量测量（例如飞行高度或是制程温度）和理想值的偏差的和。算法会设法调整参数，让这些不希望出现的偏差降到最小。而控制量的大小本身也会包括在成本函数中。

LQR算法减少了工程师为了让控制器最佳化，而需付出的心力。不过工程师仍然要列出成本函数的相关参数，并且将结果和理想的设计目标比较。因此控制器的建构常会是迭代的，工程师在模拟过程中决定最佳控制器，再去调整参数让结果更接近设计目标。

在本质上，LQR算法是找寻合适状态回授控制器的自动化方式。因此也常会有控制工程师用其他替代方式，例如全状态回授（也称为极点安置）的作法，此作法对控制器参数和控制器性能之间的关系比较明确。而LQR算法的困难之处在找合适的加权因子，这也限制了以LQR控制器合成的相关应用。

有限时间长度，连续时间的LQR

方程式如下的连续时间线性系统，$t\in[t_0,t_1]$：

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

其二次成本泛函为

$$J=x^T(t_1)F(t_1)x(t_1)+\int_{t_0}^{t_1}\left(x^TQx+u^TRu+2x^TNu\right)dt$$

其中F、Q和R都是正定矩阵。

可以让成本最小化的回授控制律为

$$u=-Kx$$

其中K为

$$K = R^{-1}(B^T P(t) + N^T)$$

而P是连续时间Riccati方程的解：

$$A^T P(t) + P(t)A - (P(t)B + N)R^{-1}(B^T P(t) + N^T) + Q = -\dot{P}(t)$$

边界条件如下

$$P(t_1) = F(t_1).$$

J_{min}的一阶条件如下

(i) 状态方程

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

(ii) 协态方程

$$-\dot{\lambda} = Qx + Nu + A^T \lambda$$

(iii) 静止方程

$$0 = Ru + N^T x + B^T \lambda$$

(iv) 边界条件

$$x(t_0) = x_0$$

且 $\lambda(t_1) = F(t_1)x(t_1)$

无限时间长度，连续时间的LQR

考虑以下的连续时间线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

其成本泛函为

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u\right) dt$$

可以让成本最小化的回授控制律为

$$u = -Kx$$

其中K定义为

$$K = R^{-1}(B^T P + N^T)$$

而P是代数Riccati方程的解

$$A^TP+PA-(PB+N)R^{-1}(B^TP+N^T)+Q=0$$

也可以写成下式

$$\mathcal{A}^TP+P\mathcal{A}-PBR^{-1}B^TP+\mathcal{Q}=0$$

其中

$$\mathcal{A}=A-BR^{-1}N^T \qquad \mathcal{Q}=Q-NR^{-1}N^T$$

有限时间长度，离散时间的LQR

考虑离散时间的线性系统，定义如下 [1]

$$x_{k+1}=Ax_k+Bu_k$$

其性能指标为

$$J=x_N^TQx_N+\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k^TQx_k+u_k^TRu_k+2x_k^TNu_k\right)$$

可以让性能指标最小化的最佳控制序列为

$$u_k=-F_kx_k$$

其中

$$F_k=(R+B^TP_{k+1}B)^{-1}(B^TP_{k+1}A+N^T)$$

而P_k是由动态Riccati方程倒退时间佚代计算而得

$$P_{k-1}=A^TP_kA-(A^TP_kB+N)\left(R+B^TP_kB\right)^{-1}(B^TP_kA+N^T)+Q$$

从终端条件$P_N=Q$开始计算。注意u_N没有定义，因为 x 是由$Ax_{N-1}+Bu_{N-1}$推导到其最终状态 x_N。

无限时间长度，离散时间的LQR

考虑离散时间的线性系统，定义如下

$$x_{k+1}=Ax_k+Bu_k$$

其性能指标为

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x_k^TQx_k+u_k^TRu_k+2x_k^TNu_k\right)$$

可以让性能指标最小化的最佳控制序列为

$$u_k = -Fx_k$$

其中

$$F = (R + B^T PB)^{-1}(B^T PA + N^T)$$

而P是离散代数Riccati方程（DARE）的唯一正定解。

$$P = A^T PA - (A^T PB + N)\left(R + B^T PB\right)^{-1}(B^T PA + N^T) + Q.$$

可以写成

$$P = \mathcal{A}^T P\mathcal{A} - \mathcal{A}^T PB\left(R + B^T PB\right)^{-1} B^T P\mathcal{A} + \mathcal{Q}$$

其中

$$\mathcal{A} = A - BR^{-1}N^T \qquad \mathcal{Q} = Q - NR^{-1}N^T.$$

而求解代数Riccati方程的一个方式是迭代计算有限时间的动态Riccati方程，直到所得的解收敛为止。

参考资料

1. Chow, Gregory C. Analysis and Control of Dynamic Economic Systems. Krieger Publ. Co. 1986. ISBN 0-89874-969-7.

    - Kwakernaak, Huibert & Sivan, Raphael. Linear Optimal Control Systems. First Edition. Wiley-Interscience. 1972. ISBN 0-471-51110-2.
    - Sontag, Eduardo. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems. Second Edition. Springer. 1998. ISBN 0-387-98489-5.

外部链接

- MATLAB function for Linear Quadratic Regulator design (http://www.mathworks.com/help/toolbox/control/ref/lqr.html) （页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20120824013759/http://www.mathworks.com/help/toolbox/control/ref/lqr.html)，存于互联网档案馆）
- Mathematica function for Linear Quadratic Regulator design (http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/LQRegulatorGains.html) （页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20131017135004/http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/LQRegulatorGains.html)，存于互联网档案馆）